Всероссийская олимпиада школьников по математике
II этап
2017/2018 уч. г.

10 класс

10.1. Найдите все функции $f(x)$, определённые при всех действительных x, такие, что $f(x) + f(1-x) = x^2$.

10.2. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ отмечены середины M и N, а на сторонах BC и DA — точки K и P соответственно так, что $\angle KMP = \angle KNP = 90^\circ$. Докажите, что K и P — середины сторон квадрата.

10.3. План города Квадратово представляет собой квадрат $ABCD$ в виде сетки 8×8 кварталов (со стороной каждого квартала, равной 100 метрам). Серёжа в 15 часов вышел из школы в точке C в направлении автостанции A со скоростью 6 км/ч и успел прийти к автобусу, отправлявшемуся в 15.12. Идти он мог и по улицам (сторонам сетки, в том числе на границе сетки), и по дворам (диагоналям кварталов 1×1). Сколькими различными маршрутами мог пройти Серёжа?

10.4. Саша записал на доске 10 действительных чисел, затем он увеличил каждое число на $k > 0$ и произведение всех чисел не изменилось. Он опять их все увеличил на k и снова произведение всех чисел не изменилось. Какое максимальное число таких операций может провести Саша, чтобы произведение не изменилось?

10.5. В школе учится 100 мальчиков и 100 девочек. Каждая девочка знакома хотя бы с одним мальчиком, а каждый мальчик — хотя бы с одной девочкой. Однажды каждая девочка сказала: *Среди знакомых мне мальчиков не менее двух третей — двоечники*, а каждый мальчик сказал: *Среди знакомых мне девочек не менее половины — троечницы.* Известно, что все дети сказали правду, но при этом в школе всего 10 мальчиков — двоечники. Какое наименьшее число девочек может быть троечницами?