

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап

2017/2018 уч. г.

11 класс

11.1. Уравнение $ax + \frac{c}{x} = b$, в котором коэффициенты a , b и c отличны от нуля, имеет решение. Докажите, что тогда имеет решение и одно из уравнений $ax + \frac{c}{x} = b + 1$ и $ax + \frac{c}{x} = b - 1$.

11.2. Чему равно наибольшее значение выражения $(1 + a_1)(2 + a_2) \dots (n + a_n)$, где a_1, a_2, \dots, a_n — перестановка натуральных чисел $1, 2, \dots, n$?

11.3. Функция f при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$f(x^2 + 2y) \geq f(x^2 + 3y).$$

Известно, что $f(100) = 100$. Найдите $f(200)$.

11.4. Саша записал на доске 10 действительных чисел, затем он увеличил каждое число на $k > 0$ и произведение всех чисел не изменилось. Он опять их все увеличил на k и снова произведение всех чисел не изменилось. Какое максимальное число таких операций может провести Саша, чтобы произведение не изменилось?

11.5. В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, O и I — центры описанной и вписанной окружностей соответственно, K — середина стороны AC . Докажите, что треугольник KIO не может быть правильным.